Материалы Летней школы для учителей математики "Дополнительные главы школьного курса математики: алгебра, анализ и геометрия", 17-18 июня 2015 года, Механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова

Две лекции на Летней школе «Использование алгебры и логики в задачах с параметрами»

Профессор механико-математического факультета МГУ И.Н. Сергеев

17 июня 2015 г.

В докладе обсуждаются самые общие подходы к решению задач с параметрами и других сложных или нестандартных задач, встречающихся на олимпиадах, дополнительных вступительных испытаниях и на ЕГЭ по математике.

Согласно классификации докладчика, каждый из подходов можно отнести к какому-либо разделу математики, который активно применяется при решении данной задачи (возможно применение нескольких подходов к решению одной задачи). Наиболее популярны следующие подходы.

1. <u>Алгебраический</u> (связанный с преобразованиями выражений, уравнений, неравенств, с введением букв, приданием им смысла неизвестных или параметров).
2. <u>Логический</u> (опирающийся на рассуждения, на логические операции с высказываниями, т.е. логические связки «и», «или», «если…, то…», «тогда и только тогда, когда», «не» и т.д., на изучение вопросов всеобщности, существования и единственности).
3. <u>Функциональный</u> (использующий рассмотрение специально подобранных функций и исследование их свойств).
4. <u>Графический</u> (состоящий в придании задаче или её элементам графического смысла, порождающего графическую иллюстрацию, которая проливает свет на решение задачи).

Разумеется, этот список далеко не полон. Возможны и другие походы, такие как арифметический, комбинаторный, теоретико-множественный, теоретико-вероятностный, топологический и т.п.

В докладе на многочисленных примерах, взятых из экзаменов и олимпиад, демонстрируются преимущества тех или иных подходов в конкретных ситуациях. Были разобраны модельные задачи Единого государственного экзамен, Дополнительных вступительных испытаний, олимпиады Механико-математического факультета, Московской математической олимпиады, олимпиад «Ломоносов» и «Покори Воробьёвы горы!».

Лекция на Летней школе
«Планиметрия на экзаменах и олимпиадах»

Доцент факультета ВМК МГУ В.С. Панферов

17 июня 2015 г.

В докладе обсуждаются избранные факты, теоремы, приемы и методы планиметрии.

Предложен общий прием вычисления отношения длин отрезков в треугольнике, на которые они делятся в точке пересечения. Приведено общее соотношение, из которого получены формулы для вычисления отношений длин отрезков медиан, биссектрис и высот, на которые они делятся в точке пересечения. Из этого же соотношения получена теорема Чевы.

Вычислены углы, образованные высотами и сторонами треугольника. Указаны различные пары получающихся треугольников. Доказана теорема о пересечении высот треугольника. Сформулированы и доказаны теоремы Эйлера о прямой и окружности.

Вычислены углы, образованные биссектрисами и сторонами треугольника. Объяснен способ построения циркулем и линейкой треугольника по стороне, противоположному углу и биссектрисе этого угла. Доказана теорема Штейнера – Лемуса.

Лекция на Летней школе
« Планиметрия на экзаменах и олимпиадах: четырехугольники»
Доцент механико-математического факультета МГУ П.А. Бородин
17 июня 2015 г.

В лекции обсуждались различные теоремы школьной планиметрии, связанные с четырехугольниками: признаки вписанного четырехугольника (в том числе теорема об "ослиных ушах"), признак описанного четырехугольника, различные свойства трапеции (равенство площадей треугольников из горизонтальной "бабочки", свойство биссектрисы внутреннего угла трапеции и другие).

В качестве примеров применения указанных теорем были разобраны задача №3 из Московской математической олимпиады 2015 года для 11 класса, задача № 3 из варианта 11 класса олимпиады "Ломоносов" 2015 года, задача № 3 одного из вариантов олимпиады "Покори Воробьевы горы" 2014 года, задачи № 18 из вариантов досрочного ЕГЭ и июньского ЕГЭ 2015 года, а также одна задача вступительного экзамена на социологический факультет МГУ 2000 года.

Лекция на Летней школе
«Математический анализ в экзаменационных задачах»

Доцент механико-математического факультета МГУ А.В. Бегунц
18 июня 2015 г.

Показано, как применяются на экзаменах и олимпиадах различные свойства функций:

- монотонность (например, при переходе от равенства значений функции к равенству ее аргументов),
- ограниченность (например, экстремальные значения левой и правой части уравнения или неравенства),
- четность/нечётность функции, симметричность графика функции или уравнения в том числе для функции двух переменных (например, при исследовании единственности решения),
- непрерывность (теорема о промежуточных значениях),
- выпуклость элементарных функций,

а также затронуты функциональные уравнения и элементы высшей математики (производная и определённый интеграл).

Рассмотрены задачи вступительных экзаменов в МГУ разных лет и олимпиады «Ломоносов» по математике. В качестве сложной олимпиадной задачи предложена теорема о существовании двух перпендикулярных прямых, которые делят выпуклый многоугольник на четыре равновеликие части. Приведены примеры ошибочных рассуждений, связанных с недостаточно чётким пониманием теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.

Лекция на Летней школе
«Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами»

Профессор механико-математического факультета МГУ И.Н. Сергеев
18 июня 2015 г.

В докладе были перечислены все типы графических иллюстраций, которые применяются при решении математических задач:

- простейшие (круги Эйлера, графы),
- прямая (модуль как расстояние),
- окружность (тригонометрические функции),
- плоскость (графики функций, кривые, формула для расстояния, скалярное произведение векторов).

Были разобраны примеры применения каждого из перечисленных типов иллюстраций при решении задач с параметрами, а также нестандартных задач олимпиад по математике прошлых лет.

В частности, было показано, как с помощью геометрии прямой выводится арифметическая формула для наибольшего из двух чисел, а также как с помощью формулы для расстояния между точками на плоскости находятся экстремумы выражений с радикалами от двух переменных.

Лекция на Летней школе
«Стереометрия в экзаменационных задачах»

Доцент факультета ВМК МГУ В.С. Панферов

18 июня 2015 г.

В докладе обсуждаются избранные факты, формулы и приемы вычисления углов и расстояний между прямыми в пространстве.

Выведена формула вычисления отношения объемов двух пирамид с вершинами на ребрах одного трехгранного угла. Разобраны задачи с применением этой формулы.

Выведена формула, связывающая площадь плоской фигуры и её ортогональной проекции. Продемонстрированы примеры применения этой формулы для решения задач.

Выведена формулы для вычисления объема тетраэдра: по длинам противоположных ребер, расстоянию и углу между ними; по площадям двух граней, их общему ребру и углу между этими гранями. Продемонстрированы примеры применения этих формул для решения задач.

Отмечено, что все полученные формулы и их выводы являются полными аналогами известных формул планиметрии.

Лекция на Летней школе
«Элементарная теория чисел на экзаменах и олимпиадах»

Доцент механико-математического факультета МГУ А.В. Бегунц

18 июня 2015 г.

Рассмотрены основные направления числовых задач, наиболее часто встречающиеся на экзаменах (в том числе ЕГЭ) и олимпиадах. Затронуты задачи на:

- делимость,
- десятичную запись числа,
- целочисленный перебор,
- разложение на множители,
- НОД и НОК,
- оценивание целочисленных выражений.

Разобраны теоретико-числовые задачи ЕГЭ 2015 г. (базового и профильного уровней).

Приведём примеры предложенных на лекции олимпиадных задач.

1. [ММО, 2015, 11.2] В прошлом году Миша купил смартфон, который стоил целое четырёхзначное число рублей. Зайдя в магазин в этом году, он заметил, что цена смартфона выросла на 20% и при этом состоит из тех же цифр, но в обратном порядке. Какую сумму Миша потратил на смартфон?

2. [«Ломоносов», 2013/4, заключительный этап, 11.10] Прямоугольная таблица состоит из 5681 одинаковой клетки. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, …, 5681 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и так далее), а Вася – по столбцам (сначала первый столбец, затем второй и так далее). Оказалось, что ровно в 5 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?