

МГУ – школе

Семинар «Логические схемы и доказательства утверждений в математических задачах»

05 декабря 2015 года

Выступление на тему

«Логические задачи в математических олимпиадах»

Москва, факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ,
(лектор: ст. преп. ф-та ВМК МГУ Нагорный А.С., anagorny@list.ru)

Логические задачи

- Задачи-шутки
- Логические закономерности
- Арифметические ребусы, расстановки знаков, и т. п.
- Сюжетные логические задачи (нахождение соответствия между множествами), табличный метод
- Логические задачи на движение и на работу
- НОК и НОД
- Игры, стратегии, процессы и операции. Обратный ход
- Переливания, взвешивания и т. п.
- Вспомогательная раскраска
- Множества, круги Эйлера-Венна, таблицы истинности
- Отношение порядка
- Истинные и ложные высказывания. Рыцари, лжецы, хитрецы.
- «Женская» логика
- Мудрецы и колпаки
- Кооперативные алгоритмы
- Принцип Дирихле
- Разное

Избранные логические задачи на теорию графов

Список литературы

• Задачи-шутки

1. В корзине лежат 5 яблок. Разделить их между пятью лицами так, чтобы каждый получил по яблоку, а одно яблоко осталось в корзине.
2. [МП 96-6-1] В двух кошельках лежат две монеты, причем в одном монет вдвое больше, чем в другом. Как такое может быть?
3. Два отца, два сына, дед да внук съели за завтраком три яйца, причем каждому досталось целое яйцо. Могло ли так случиться?
4. Николай с сыном и Петр с сыном пошли на рыбалку. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Петр – столько же, сколько его сын. Все вместе поймали 27 рыб. Сколько рыб поймал Николай?
5. Мальчик Стёпа говорит: позавчера мне было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13. Может ли такое быть?
6. В 10-этажном доме на первом этаже живет 1 человек, на втором — 2, на третьем — 3, на четвертом — 4, ..., на десятом — 10. На каком этаже лифт останавливается чаще всего?
7. Представьте себе корабль со спущенной на воду веревочной лестницей вдоль борта. У лестницы 10 ступенек. Расстояние между ступеньками 30 см. Самая нижняя ступенька касается воды. Начинается прилив, который поднимает воду каждый час на 20 см. Через какое время покроется водой третья снизу ступенька лестницы?
8. Улитке нужно забраться на дерево высотой 10 метров. За день она поднимается на 4 метра, а за ночь сползает на 3. Когда она доползет до цели, если стартовала улитка утром в понедельник?
9. В книжном шкафу стоят по порядку четыре тома собрания сочинений Астрид Линдгрен, по 200 страниц в каждом томе. Червячок, живущий в этом собрании, прогрыз путь от первой страницы первого тома до последней страницы четвертого тома. Сколько страниц прогрыз червячок?
10. В озере растут лотосы. За сутки каждый лотос делится пополам, и вместо одного лотоса появляются два. Еще через сутки каждый из получившихся лотосов делится пополам и так далее. Через 30 суток озеро полностью покрылось лотосами. Через какое время озеро было заполнено наполовину?
11. [МБ, 6-7] Саша живет в своем доме, в котором окон на 2 больше, чем дверей. Все братья Саши – Петя, Коля и Леня – тоже живут каждый в своем доме. В доме Коли окон на 5 больше, чем дверей, а в доме Пети окон на 4 больше, чем дверей. Может ли у всех братьев Лени в домах в сумме окон быть в 4 раза больше, чем дверей?
12. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, а профессор в разговоре не участвует. Может ли так быть?
13. Найдите коэффициент при x у многочлена $(x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - z)$.
14. Андрей ведет машину со скоростью 60 км/ч. Он хочет проезжать каждый километр на 1 минуту быстрее. На сколько ему следует увеличить скорость?
15. [ММР-00/01] Назовем натуральное число "замечательным", если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Чему равна сумма цифр две тысячи первого замечательного числа?

• Логические закономерности

16. Найдите закономерность и вставьте пропущенное число (числа):
 - А) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., 21, 34...
 - Б) 7, 17, 37, 77, ..., 317...
 - В) 3, 8, 15, 24, ..., 48...
 - Г) 1, 4, 6, 5, ..., 6...

- Д) 2, 9, 28, 65, ..., 1001...
- Е) 4, 7, 12, 21, 38, ..., 136...
- Ё) 1, 11, 21, 1112, 3112, ..., 312213...
17. [МП 93-56-1] Инопланетянин со звезды Тау Кита, прилетев на Землю в понедельник, воскликнул: "А!". Во вторник он воскликнул: "АУ!", в среду — "АУУА!", в четверг — "АУУАУААУ!". Что он воскликнет в субботу?
- **Арифметические ребусы** (разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым — одинаковые), **расстановки знаков, и т. п.**
18. Сколько решений у ребуса $БОЧКА + МЁД = ВИННИ$?
19. Сколько решений у ребуса $К \cdot О \cdot Т = У \cdot Ч \cdot Ё \cdot Н \cdot Ы \cdot Й$?
20. Найти значение выражения $(В \cdot А \cdot Р \cdot Е \cdot Н \cdot Ь \cdot Е) : (К \cdot А \cdot Р \cdot Л \cdot С \cdot О \cdot Н)$
21. [МП 00-6-1] В записи $*1*2*4*8*16*32*64 = 27$ вместо знаков "*" поставьте знаки "+" или "-" так, чтобы равенство стало верным.
22. Между некоторыми из цифр 1 2 3 4 5 6 7 8 9, написанными в указанном порядке, поставьте знаки сложения и вычитания так, чтобы получилось число 100.
23. В ряд выписаны числа от 1 до 50. Можно ли расставить между ними знаки "+" и "-" так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?
24. Числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 и 512 расставьте в клетках таблицы 3×3 так, чтобы произведения по всем вертикалям, горизонталям и обеим главным диагоналям были равны.
25. [МО] КУБ является кубом. Докажите, что ШАР кубом не является. (КУБ и ШАР трёхзначные числа, разные буквы обозначают различные цифры.)
26. При помощи арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) и скобок составить число 24, используя по одному разу числа 1, 3, 4 и 6.
27. [МО 00] Расшифровать числовой ребус-систему
- $$\begin{cases} МА \cdot МА = МИР \\ АМ \cdot АМ = РИМ \end{cases}$$
28. Решить ребус $Д - В - А = Д : В : А = 2$
29. [МП 01-6-1] Решить ребус $АХ \times УХ = 2001$
30. [МП 02-6-1] Решить ребус $БАО \times БА \times Б = 2002$
31. [МП 94-7-3] Решить ребус $АБВ + ГДЕ = ЁЖЗИ$
32. [МП 05-7-5] Решить ребус $250 \cdot ЛЕТ + МГУ = 2005 \cdot ГОД$
33. [МО 13-8-1] В записи $* + * + * + * + * + * + * + * = **$ замените звёздочки различными цифрами так, чтобы равенство было верным.
34. Solve THIS + IS = EASY
35. Rechnen EINS + EINS + EINS + EINS = VIER
- **Сюжетные логические задачи (нахождение соответствия между множествами), табличный метод**
36. [МО 2010-6] Иван, Петр и Сидор ели конфеты. Их фамилии – Иванов, Петров и Сидоров. Иванов съел на 2 конфеты меньше Ивана, Петров – на 2 конфеты меньше Петра, а Петр съел больше всех. У кого из них какая фамилия?
37. В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

38. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, круг, прямоугольник и ромб. Они окрашены в разные цвета: красный, синий, жёлтый, зелёный. Известно, что красная фигура лежит между синей и зелёной; справа от жёлтой фигуры лежит ромб; круг лежит правее и треугольника и ромба; треугольник лежит не с краю; синяя и жёлтая фигуры лежат не рядом. Определите, в каком порядке лежат фигуры и какого они цвета.
39. Мастер спорта Седов, кандидат в мастера Чернов и перворазрядник Рыжов встретились в клубе перед тренировкой. — Обратите внимание, — заметил черноволосый, — один из нас седой, другой — рыжий, третий — черноволосый. Но ни у одного из нас цвет волос не совпадает с фамилией. Забавно, не правда ли? — Ты прав, — подтвердил мастер спорта. Какого цвета волосы у кандидата в мастера?
40. Три подружки были на выпускном балу в белом, красном и голубом платье. Их туфли были тех же трёх цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвета платьев и туфель у подруг.
41. Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном было просо, в другом — мак, а в третьем — ещё не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них прикрепила по табличке: "Мак", "Просо" и "Смесь". Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами все таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная надпись. Ученик Феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зёрнышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?

• **Логические задачи на движение и на работу**

42. Расстояние между Атосом и Арамисом, скачущими по одной дороге, равно 20 лье. За час Атос покрывает 4 лье, а Арамис — 5 лье. Какое расстояние будет между ними через час?
43. Из пунктов А и Б, находящихся на расстоянии 50 км, одновременно стартуют лыжники навстречу друг другу со скоростями 15 и 10 км/ч, соответственно. В момент старта со лба первого лыжника взлетает муха со скоростью 20 км/ч и летит в сторону второго лыжника, затем, оттолкнувшись от лба второго лыжника, с той же скоростью летит обратно, отталкивается от лба первого лыжника и т.д. пока лыжники не столкнутся лбами и не раздавят муху. Найти расстояние, которое пролетела муха.
44. Яблоко плавает на воде так, что $\frac{1}{5}$ часть яблока находится над водой, а $\frac{4}{5}$ — под водой. Под водой яблоко начинает есть рыбка со скоростью 120 г/мин., одновременно над водой яблоко начинает есть птичка со скоростью 60 г/мин. Какая часть яблока достанется рыбке, а какая — птичке?

• **НОК и НОД (для 4-5 классов!)**

45. Артем, Боря и Ваня регулярно ходят в бассейн. Артем бывает в нем каждый 3-й день, Боря — каждый 5-й, а Ваня — каждый 6-й. 1 октября все ребята встретились в бассейне. Когда все трое встретятся в бассейне в следующий раз? Бассейн работает без выходных.
46. Винни Пух съедает бочонок мёда за 10 минут, а Пятачок — за 15. За какое время минут они съедят 7 бочонков мёда, если будут есть одновременно?
47. Банку меда Винни и Пятачок съедают за 10 минут, а один Пятачок — за 15 минут. Как быстро один Винни съест четыре таких банки меда?
48. Через пробоину в борту корабля в трюм налилось 270 ведер воды. Один насос за 3 ч выкачивает 85 ведер, другой за 6 ч — 55 ведер. Через сколько часов два насоса, работая вместе, выкачают всю воду в трюме, если каждые два часа в трюм через пробоину поступает 45 ведер воды?

• **Игры, стратегии, процессы и операции. Обратный ход**

49. На доске было записано некоторое число. Из него вычли 7, умножили на 5, вычли 6 и разделили на 8. Получилось число 3. Какое число было записано на доске?

50. [МО 15-1] Из 9 камней сложили три столбика. Известно следующее:

- Если снять один камень со второго столбика, в нем будет столько же камней, сколько в первом столбике;
- Если снять один камень с третьего столбика, в нем будет столько же камней, сколько было во втором столбике изначально.

Сколько камней в первом столбике?

51. Ира выписала алфавит и отметила в нем букву. Затем Ира несколько раз проделала следующее: если последней была отмечена гласная, то Ира отмечала ближайшую следующую по алфавиту согласную, а если была отмечена согласная – то гласную. Какие буквы отметила Ира, если всего она отметила 7 букв, и последней из них отметила букву «У»?

52. Летит стая гусей. Навстречу им – один гусь. Он спрашивает: "Сколько Вас? Наверное, 100?" «Нет. А вот если бы нас было столько, еще столько, еще пол-столько, еще четверть-столько, да ты один, тогда нас было бы 100». Сколько было гусей в стае?

53. Предложил черт лодырю: "Всякий раз, как перейдешь этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 24 копейки". Трижды перешел лодырь мост – и остался совсем без денег (т.е. отдал в третий раз черту те 24 копейки, что оказались у него к этому моменту). Сколько денег было у лодыря первоначально?

54. В корзине лежали орехи. Маша съела половину всех орехов и еще два. Затем Даша съела 8 орехов и половину остатка. Саша съел четверть того, что осталось. Паша – треть остатка и еще 5 орехов. В итоге в корзине осталось 5 орехов. Сколько орехов было в корзине вначале?

55. а) На столе лежат 111 спичек. Маша и Даша по очереди берут со стола по несколько спичек, но не больше десяти за один раз. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто победит при правильной игре?

б) На полу лежат три кучки - из 3, 4 и 5 спичек. Теперь Маша и Даша за один раз могут взять любое количество спичек, но только из одной кучки. Кто выиграет на этот раз?

56. Имеется несколько кучек камней. Двое по очереди берут из них камни. За один ход разрешается взять из одной кучки от 1 до 5 камней. Определите выигрышную стратегию в этой игре, если тот, кто взял последний камень а) выигрывает; б) проигрывает.

57. [ММО 75] Коля и Витя играют в следующую игру. На столе лежит куча из 31 камня. Мальчики делают ходы поочередно, а начинает Коля. Делая ход, играющий делит каждую кучку, в которой больше одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, кто после своего хода оставляет кучки по одному камню в каждой. Сможет ли Коля сделать так, чтобы выиграть при любой игре Вити?

58. [ММО 06] Алиса и Базилио играют в следующую игру: из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

• **Переливания, взвешивания и т. п.**

59. а) Есть 27 монет. Известно, что одна из них фальшивая (по весу легче настоящих). Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?

б) Можно ли определить фальшивую монету за три взвешивания, если монет 25?

60. Из восьмилитрового ведра, наполненного молоком, надо отлить 4 литра с помощью двух пустых бидонов: трехлитрового и пятилитрового.
61. Дан мешок сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Можно ли за 10 взвешиваний отмерить 1 кг сахара?
62. Имеются неправильные чашечные весы, мешок крупы и правильная гиря в 1 кг. Как отвесить на этих весах 1 кг крупы?
63. Известно, что среди ста монет имеется ровно одна фальшивая (отличается по весу от настоящих). С помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определите, легче или тяжелее фальшивая монета настоящей (находить ее не надо!).
64. В корзине лежат 13 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух яблок. Придумайте способ выяснить за 8 взвешиваний суммарный вес всех яблок.

- **Вспомогательная раскраска**

Задачи на эту тему мы разбирали в прошлый раз (тема «Задачи на доказательство»).

65. [ТГ6] В квадрате 7×7 клеток размещено 16 плиток размером 1×3 и одна плитка 1×1 . Докажите, что плитка 1×1 либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата.
66. [ТГ7] Улицы города расположены в трёх направлениях, так что все кварталы – равные между собой равносторонние треугольники. Правила уличного движения таковы, что через перекресток можно проехать либо прямо, либо повернув влево или вправо на 120° в ближайшую улицу. Поворачивать разрешается только на перекрёстках. Две машины выехали друг за другом из одной точки в одном направлении и едут с одинаковой скоростью, придерживаясь этих правил. Может ли случиться, что через некоторое время они на какой-то улице (не на перекрёстке) встретятся?
67. Правильный треугольник разбит на n^2 одинаковых правильных треугольников. Часть из них занумерована числами $1, 2, \dots, m$, причем треугольники с последовательными номерами имеют смежные стороны. Докажите, что m не превосходит $n^2 - n + 1$.

- **Множества, круги Эйлера-Венна, таблицы истинности**

68. Кого больше: котов, кроме тех котов, которые не Васьки, или Васек, кроме тех Васек, которые не являются котами?
69. Среди 40 кувшинов, с которыми атаман разбойников приехал в гости к Али-Бабе, нашлись два кувшина разной формы и два кувшина разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два кувшина одновременно и разной формы, и разного цвета.
70. Во всех зоопарках, где есть слоны и носороги, нет жирафов. Во всех зоопарках, где есть носороги и нет жирафов, есть слоны. Наконец, во всех зоопарках, где есть слоны и жирафы, есть и носороги. Может ли быть такой зоопарк, в котором есть слоны, но нет ни жирафов, ни носорогов?
71. [Квант 73-1] На учительском кафтане площадью 1 размещены 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $1/2$. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $1/5$.

- **Отношение порядка**

72. У Вовочки в школе только три предмета – математика, чтение и рисование. Но зато школа работает без выходных, и каждый день по каждому предмету Вовочку спрашивают и ставят оценку (от 2 до 5). Родители хвалят Вовочку, если по большинству предметов у него оценки лучше, чем те, которые он получил вчера. Какое наибольшее число дней подряд Вовочку могут хвалить родители?

73. В ряд выписаны числа от 1 до 9999. Как вычеркнуть из этой записи 100 цифр так, чтобы оставшееся число было а) максимальным б) минимальным?
74. Человечество бессмертно и начинает свою историю от Адама и Евы; каждый человек - смертен. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама, в который каждый следующий человек - сын предыдущего.
75. Три бегуна А, Б, В несколько раз совершили забег на 100 метров. При подведении результатов оказалось, что А обогнал Б больше, чем в половине забегов, Б обогнал В больше, чем в половине забегов, а В обогнал А больше, чем в половине забегов. Могло ли это случиться?
76. [ТЛ 94] Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, а один - с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)
77. [ТГ 16] Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, но большинство (не меньше 80%) – с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)

• **Истинные и ложные высказывания. Рыцари, лжецы, хитрецы.**

Рыцарь всегда говорит только правду, лжец всегда врет, хитрец может говорить как правду, так и ложь. Вопросы задаются такие, на которые можно ответить «да» или «нет».

78. Человек говорит: «Я лжец». Является ли он уроженцем острова рыцарей и лжецов?
79. Однажды Алиса оказалась в какой-то из двух стран — А или Я. Она знает, что все жители страны А всегда говорят правду, а все жители страны Я — всегда лгут. Притом все они часто ездят в гости друг к другу. Может ли Алиса, задав один-единственный вопрос первому встречному, узнать, в какой из стран она находится?
80. Рядом сидят мальчик и девочка.
— Я мальчик, — говорит черноволосый ребенок.
— Я девочка, — говорит рыжий ребенок.
Если хотя бы кто-то из них врет, кто мальчик, а кто девочка?
81. Встретились несколько аборигенов (каждый — либо лжец, либо — рыцарь), и каждый заявил всем остальным: «Вы все — лжецы». Сколько рыцарей было среди них?
82. По дороге цепочкой ползут три черепахи. "За мной ползут две черепахи" - говорит первая. "За мной ползет одна черепаха, и передо мной ползет одна черепаха" - говорит вторая. "Передо мной ползут две черепахи, и за мной ползет одна черепаха" - говорит третья. Как такое может быть?
83. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: "Сколько рыцарей среди твоих спутников?". Первый ответил: "Ни одного". Второй сказал: "Один". Что сказал третий?
84. Однажды на лестнице была найдена странная тетрадь. В ней было записано сто утверждений:
"В этой тетради ровно одно неверное утверждение";
"В этой тетради ровно два неверных утверждения";
"В этой тетради ровно три неверных утверждения";
...
"В этой тетради ровно сто неверных утверждений".
Есть ли среди этих утверждений верные, и если да, то какие?
85. [ТГ-98/99] 12 кандидатов в мэры рассказывали о себе. Через некоторое время один сказал: "До меня соврали один раз". Другой сказал: "А теперь — дважды". "А теперь — трижды" -

сказал третий, и так далее до 12-го, который сказал: "А теперь соврали 12 раз". Тут ведущий прервал дискуссию. Оказалось, что по крайней мере один кандидат правильно посчитал, сколько раз соврали до него. Так сколько же раз всего соврали кандидаты?

86. На острове живут лжецы и рыцари, всего 2001 человек. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы лгут. Каждый житель острова заявил: "Среди оставшихся жителей острова более половины - лжецы". Сколько лжецов на острове?
87. На острове живут два племени — аборигены и пришельцы. Известно, что аборигены всегда говорят правду, пришельцы — всегда лгут. Путешественник нанял туземца-островитянина в проводники. По дороге они встретили какого-то человека. Путешественник попросил проводника узнать, к какому племени принадлежит этот человек. Проводник вернулся и сообщил, что человек назвался аборигеном. Кем был проводник — аборигеном или пришельцем?
88. В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденном бульоне. На суде Мартовский Заяц заявил, что бульон украл Болванщик. Соня и Болванщик тоже дали показания, но что они сказали, никто не запомнил, а запись смыло Алисиными слезами. В ходе судебного заседания выяснилось, что бульон украл лишь один из подсудимых и что только он дал правдивые показания. Так кто украл бульон?
89. [МП 10-6-2] В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про своё золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: Всё моё золото я украл у Дракона.

Б: Ты лжешь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

90. Пусть x — некоторое натуральное число. Среди утверждений:

$2x$ больше 70;

x меньше 100;

$3x$ больше 25;

x не меньше 10;

x больше 5

три верных и два неверных. Чему равно x ?

91. На острове Невезения живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В Думе острова 101 депутат. В целях сокращения бюджета было решено сократить Думу на одного депутата. Но каждый из депутатов заявил, что, если его выведут из состава Думы, то среди оставшихся депутатов большинство будут лжецами. Сколько рыцарей и сколько лжецов в Думе?
92. [ММР 00/01-7] На острове проживают 1234 жителя, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Однажды, все жители острова разбились на пары, и каждый про своего соседа по паре сказал: "Он - рыцарь!", либо "Он - лжец!". Могло ли в итоге оказаться, что тех и других фраз произнесено поровну?
93. [МП 09.7.3] У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью и восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а те, у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», желтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?
94. Путешественник встретил трех островитян: рыцаря, лжеца и хитреца. На вопрос путешественника «Кто ты?» первый ответил: «Я не рыцарь», второй: «Я не лжец», третий: «Я не хитрец». Кто есть кто?
95. Перед Вами трое – рыцарь, лжец и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать? Вопросы можно задавать в любом количестве любому из троих.
96. Перед Вами четверо – рыцарь, лжец и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

- **«Женская» логика**

97. Коля Васин задумал число: 1, 2 или 3. Вы задаете ему только один вопрос, на который он может ответить "да", "нет" или "не знаю". Сможете ли вы угадать число, задав всего лишь один вопрос?
98. Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит "да", "нет" или "не знаю", и по ответу на который Вы сможете понять, какие монеты ему достались.
99. [ТА 08.5.6] В некоторой стране живут Рыцари, Лжецы и Фантазёры. Фантазёры могут и солгать и сказать правду, но никогда не врут два раза подряд и никогда не говорят правду два раза подряд. Как-то встретились трое жителей. Первый сказал: «Я Рыцарь», второй сказал: «Я Лжец», третий сказал: «Я Фантазёр». После этого первый сказал: «Третий лжёт», а второй сказал: «Первый солгал оба раза». Кем является каждый из них на самом деле?
100. Известно, что Шакал всегда лжет, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф дает честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и решил выяснить, в каком порядке огни стоят. Спросив всех по очереди: «Ты Шакал?», он понял лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог ещё понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?
- («как попало» означает, что один из ответов «Да» или «Нет» выбирается произвольно.)

- **Мудрецы и колпаки**

101. В поезде едут три мудреца. Внезапно поезд въезжает в туннель, и после того, как загорается свет, каждый из мудрецов видит, что лица его коллег испачканы сажей, влетевшей в окно вагона. Все трое начинают смеяться над своими испачкавшимися попутчиками, однако внезапно самый сообразительный мудрец догадывается, что его лицо тоже испачкано. Как ему это удалось?
102. В сундуке лежали два колпака белого цвета и три черного. В темную комнату завели трех мудрецов и надели на них какие-то колпаки из сундука. Потом вывели в другую комнату. Они не видят, какого цвета колпак на них, но видят колпаки других. Через некоторое время один из них догадался, какого цвета на нем колпак. Как? Какого цвета был колпак?

- **Кооперативные алгоритмы**

103. [Всерос 97.5.9.4] Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает каждому колпак белого или черного цветов. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из двух цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз). После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?
104. [ТГ29] Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек –

белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Мудрецы могут заранее договориться о своих действиях (до того, как им завязали глаза); мудрецам известно, каких 1000 цветов могут быть колпаки.

- 105.[ТГ29] Фокусник с завязанными глазами выдает зрителю 5 карточек с номерами от 1 до 5. Зритель прячет две карточки, а три отдает ассистенту фокусника. Ассистент указывает зрителю на две из них, и зритель называет номера этих карточек фокуснику (в том порядке, в каком захочет). После этого фокусник угадывает номера карточек, спрятанных у зрителя. Как фокуснику и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался?
- 106.[ТГ29] Фокусник с завязанными глазами выдает зрителю 29 карточек с номерами от 1 до 29. Зритель прячет две карточки, а остальные отдает ассистенту фокусника. Ассистент указывает зрителю на две из них, и зритель называет номера этих карточек фокуснику (в том порядке, в каком захочет). После этого фокусник угадывает номера карточек, спрятанных у зрителя. Как фокуснику и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался?
- 107.[ТГ19] а) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные – картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
- б) Второй фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту?
- 108.[МП 11-6-5] Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: "У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем на обед". Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись?
- 109.[МП 07-6-6] Кощей Бессмертный похитил у царя трёх дочерей. Отправился Иван-царевич их выручать. Приходит он к Кощею, а тот ему и говорит: "Завтра поутру увидишь пять заколдованных девушек. Три из них – царёвы дочери, а ещё две – мои. Для тебя они будут неотличимы, а сами друг дружку различать смогут. Я подойду к одной из них и стану у неё спрашивать про каждую из пятерых: "Это царевна?". Она может отвечать и правду, и неправду, но ей дозволено назвать царевнами ровно двоих (себя тоже можно называть). Потом я так же опрошу каждую из остальных девушек, и они тоже должны будут назвать царевнами ровно двоих. Если после этого угадаешь, кто из них и вправду царевны, отпущу тебя восвояси невредимым. А если ещё и догадаешься, которая царевна старшая, которая – средняя, а которая – младшая, то и их забирай с собой". Иван может передать царевнам записку, чтобы научить их, кого назвать царевнами. Может ли он независимо от ответов Кошечевых дочерей
- а) вернуться живым?
- б) увезти царевен с собой?

• Принцип Дирихле

Задачи на эту тему мы разбирали в прошлый раз (тема «Задачи на доказательство»).

- 110.[ТЛ 89] Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 1989.
111. Каждая из 9 прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2:3. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

112. [ММО 76-8-3] На сферическом Солнце обнаружено конечное число круглых пятен, каждое из которых занимает меньше половины поверхности Солнца. Эти пятна предполагаются замкнутыми (т.е. граница пятна принадлежит ему) и не пересекаются между собой. Доказать, что на Солнце найдутся две диаметрально противоположные точки, не покрытые пятнами.
113. [ТЛ 94] В Простоквашинской начальной школе учится всего 20 детей. У любых двух из них есть общий дед. Докажите, что у одного из дедов в этой школе учится не менее 14 внуков и внучек.

• **Разное**

114. В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?
115. В дремучем Муромском лесу из-под земли бьют десять источников мёртвой воды: от №1 до №10. Из первых девяти источников мёртвую воду может взять каждый, но источник №10 находится в пещере Кощея, в которую никто, кроме самого Кощея, попасть не может. На вкус и цвет мёртвая вода ничем не отличается от обыкновенной, однако, если человек выпьет из какого-нибудь источника, он умрёт. Спасти его может только одно: если он запьёт ядом из источника, номер которого больше. Например, если он выпьет из седьмого источника, то ему надо обязательно запить ядом №8, №9 или №10. Если он выпьет не седьмой яд, а девятый, ему может помочь только яд №10. А если он сразу выпьет десятый яд, то ему уже ничто не поможет. Иванушка-дурачок вызвал Кощея на дуэль. Условия дуэли были такие: каждый приносит с собой кружку с жидкостью и даёт её выпить своему противнику. Кощей обрадовался: "Ура! Я дам яд №10, и Иванушка-дурачок не сможет спастись! А сам выпью яд, который Иванушка-дурачок мне принесёт, запью его своим десятым и спасусь!" В назначенный день оба противника встретились в условленном месте. Они честно обменялись кружками и выпили то, что в них было. Каковы же были радость и удивление обитателей Муромского леса, когда оказалось, что Кощей умер, а Иванушка-дурачок остался жив! Только Василиса Премудрая догадалась, как удалось Иванушке победить Кощея. Попробуйте догадаться и вы.
116. [МО 09-6-4] В тюрьме Кощея пять камер, пронумерованных числами от 1 до 5. В каждой камере сидит по одному узнику. Василиса уговорила Кощея провести эксперимент: на стене каждой камеры она один раз напишет какой-нибудь номер и в полночь каждый узник перейдёт в камеру с указанным номером (если номер на стене совпадает с номером камеры, то узник никуда не переходит). В следующую полночь узники опять должны перейти из камеры в камеру согласно указаниям на стене, и так они действуют в течение пяти ночей. Если расположение узников в камерах в течение всех шести дней (включая первый) ни разу не повторится, то Василисе дадут звание Премудрой, а узников отпустят. Помогите Василисе написать номера в камерах.

Избранные логические задачи на теорию графов

117. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
118. За круглым столом сидят несколько гостей. Некоторые из них знакомы между собой; знакомство взаимно. Все знакомые любого гостя (считая его самого) сидят вокруг стола через равные промежутки. (Для другого человека эти промежутки могут быть другими.) Известно, что любые двое имеют хотя бы одного общего знакомого. Докажите, что все гости знакомы друг с другом.
119. В кружке у каждого члена имеется один друг и один враг. Доказать, что
а) число членов чётно;
б) кружок можно разделить на два нейтральных кружка.

120. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо "красный", либо "синий" граф не является плоским.
121. [МП 07-6-4] В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.
122. [ТГ4] В Швамбрании N городов, каждые два соединены дорогой. При этом дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник устанавливает на всех дорогах одностороннее движение таким образом, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться. Доказать, что
- а) волшебник может это сделать;
 - б) найдётся город, из которого можно добраться до всех, и найдётся город, из которого нельзя выехать;
 - в) существует единственный путь, обходящий все города;
 - г) волшебник может осуществить своё намерение $N!$ способами.
123. [Всерос 01.5.9.6] В компании из $2n + 1$ человека для любых n человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.
124. [ПВГ 12/13.9] В классе, состоящем из 21 человека, любые три ученика ровно один раз делали вместе домашнее задание, причем либо по математике, либо по русскому языку. Можно ли утверждать, что в этом классе существует четверка учеников, любые трое из которых делали вместе домашнее задание по одному и тому же предмету?
125. [тмо21.2] Дана пятиугольная призма с основаниями $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Все ребра оснований и все отрезки A_iB_j ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) окрашены либо в красный, либо в зеленый цвет так, что в каждом треугольнике, вершины которого находятся в вершинах призмы и стороны которого окрашены, имеются две стороны разного цвета. Доказать, что все десять ребер оснований окрашены одинаково.

126. Ключ к сокращениям названий олимпиад и др. источников

- [МП 07-6-4] Олимпиада «Математический праздник», 2007 г., 6 класс, задача 4
[ТА 08.5.6] Весенний турнир Архимеда, 2008 г., 5 класс, задача 6
[МО 09-6-4] Окружная олимпиада по математике (Москва), 2009 г., 6 класс, задача 4
[ММР 00/01-7] Московская математическая регата, 2000/2001 гг., 7 класс
[ТГ29] 29-й Турнир Городов
[ТЛ 94] Турнир Ломоносова, 1994 г.
[ПВГ 12/13.9] Олимпиада «Покори Воробьевы горы!», 2012/2013 г., задача 9
[ММО 76-8-3] Московская математическая олимпиада, 1976 г., 8 класс, задача 3
[Всерос 01.5.9.6] Всероссийская олимпиада по математике 2001 г., 5 этап, 9 класс, задача 6
[Квант 73-1] Конкурс решения задач в журнале «Квант», 1973 г., №1
[mmo21.2] 21-я Международная математическая олимпиада, задача 2

Список литературы (логика и графы)

1. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Физматкнига, 2006.
2. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальные этапы. – М.: МЦНМО, 2007.
3. Акияма Дж., Руис М.-Дж. Страна математических чудес. – М.: МЦНМО, 2009.
4. Акулич И.Ф. Учимся решать сложные олимпиадные задачи. – М.: Илекса, 2014.
5. Арнольд В.И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. – М.: МЦНМО, 2007.
6. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.
7. Боно Э. Учите своего ребенка мыслить. – Минск: Попурри, 2008.
8. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988.
9. Васильев Н.Б. и др. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1981.
10. Весенний турнир Архимеда (под ред. Чулкова П.В.) – М.: МЦНМО, 2009.
11. Володкович В.А. Сборник логических задач. – М.: Дом педагогики, 1998.
12. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986.
13. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. – М.: Наука, 1986.
14. Генденштейн Л.Э., Мадышева Е.Л. Игры и истории на развитие сообразительности для детей 6-8 лет. Серия «Энциклопедия развивающих игр». – М.: Илекса, 2004.
15. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки – Киров: "АСА", 1994.
16. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2005.
17. Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы. – М.: МЦНМО, 2009.
18. Заславский А.А., Френкин Б.Р. Математика турниров. – М.: МЦНМО, 2009.
19. Звонкин А.К. Малыши и математика. Домашний кружок для дошкольников. – М.: МЦНМО, 2010.
20. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки. – М.: Наука, 1987.
21. Калинина А.Б., Кац Е.М., Тилипман А.М. Математика в твоих руках: Начальная школа – М.: ВАКО, 2015.
22. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 2001.
23. Канель-Белов А.Я., Трепалин А.С., Яценко И.В. Олимпиадный ковчег. – М.: МЦНМО, 2014.
24. Кац Е.М. Пирог с математикой. Игры для детей 4-7 лет. – М.: МЦНМО, 2014.
25. Ковалева С.П. Олимпиадные задания по математике. – Волгоград, «Учитель», 2007.
26. Козлова Е.Г. Сказки и подсказки. Задачи для математического кружка. – М.: МЦНМО, 2011.

27. Кононов А.Я. Математическая мозаика. Занимательные задачи для учащихся 5–11 классов. – М.: Педагогическое общество России, 2004.
28. Кюршак Й. и др. Венгерские математические олимпиады. – М.: Мир, 1976.
29. Левитас Г.Г. Нестандартные задачи по математике. – М.: Илекса, 2015.
30. Леман И. Увлекательная математика. – М.: Знание, 1985.
31. Летние конференции Турнира городов (под ред. Константинова Н.Н.) – М.: МЦНМО, 2009.
32. Материалы городских математических олимпиад, 1998 – 2012 гг.
33. Маркова И.С. Новые олимпиады по математике. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005.
34. Медников Л.Э. Четность. – М.: МЦНМО, 2009.
35. Медников Л.Э., Шаповалов А.В. Турнир городов: мир математики в задачах. – М.: МЦНМО, 2012.
36. Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов. – Мн.: ТетраСистемс, 2001.
37. Международные математические олимпиады (под ред. Сергеева И.Н.) . – М., Наука, 1987
38. Московские математические регаты (составитель Блинков А.Д.) – М.: МЦНМО, 2001.
39. Перельман Я.И. Живая математика. – М.: Наука, 1974.
40. Петербургские олимпиады школьников по математике. – СПб.: Невский диалект, 2007.
41. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2001.
42. Раскина И.В., Шноль Д.Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2015.
43. Садовничий В.А., Григорян А.Л., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: МГУ, 1987.
44. Соминский И.С. Метод математической индукции. – М.: Физматгиз, 1961.
45. Спивак А.В. Математический кружок (6-7 классы). – М.: МЦНМО, 2010.
46. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. – М.: Мир, 1978.
47. Творческие конкурсы учителей математики. Задачи и решения. – М.: МЦНМО, 2008.
48. Триг Ч. Задачи с изюминкой. – М.: Мир, 1975.
49. Успенский В.А. Простейшие примеры математических доказательств – М.: МЦНМО, 2009.
50. Уфнаровский В.А. Математический аквариум. – Кишинев: Штиинца, 1987.
51. Фарков А.В. Учимся решать олимпиадные задачи. Геометрия. 5-11 классы. – М.: Айрис-пресс, 2007.
52. Федоров Р.М, Канель-Белов А.Я, Ковальджи А.К, Яценко И.В. Московские математические олимпиады, 1993 – 2005г. / Под ред. Тихомирова В.М. – М.: МЦНМО, 2006.
53. Фомин А.А., Кузнецова Г.М. Международные математические олимпиады. – М.: Дрофа, 2004.
54. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математике. – Минск: Вышэйшая школа, 1978.
55. Шаповалов А.В. Принцип узких мест. – М.: МЦНМО, 2008.
56. Шаповалов А.В. Как построить пример? – М.: МЦНМО, 2013.
57. Шаповалов А.В., Медников Л.Э. Как готовиться к математическим боям. – М.: МЦНМО, 2014.
58. Шарыгин И.Ф. Математический винегрет. – М.: Мир. 2002.
59. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 класс. – М.: Просвещение. 1991.
60. Шеховцов В.А. Решение олимпиадных задач повышенной сложности. – Волгоград: Учитель, 2009.
61. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики (части 1-3).
62. Школьные математические олимпиады. – М.: Дрофа, 1999.
63. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. – М.: Наука, 1981.
64. Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б. Всероссийские математические олимпиады школьников.
65. www.problems.ru
66. www.mccme.ru/olympiads
67. www.mccme.ru/ilib
68. www.mccme.ru/kvant
69. www.mmmf.msu.ru