

Семинар «Геометрия в школе, на экзаменах и олимпиадах»

Задачи по геометрии на вступительных экзаменах и ЕГЭ

О.Н. Косухин

(механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова)

Векторный метод является одним из самых эффективных методов решения многих геометрических задач. В то же время этот метод очень трудно усваивается учащимися. Понятие о центре масс, пришедшее в геометрию из механики, позволяет сделать векторный метод простым и наглядным.

Напомним определение центра масс. Пусть на плоскости расположены n точек A_1, A_2, \dots, A_n , которым сопоставлены числа (массы) m_1, m_2, \dots, m_n соответственно, причём сумма $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$ (если все указанные числа положительны, то это условие выполнено автоматически). Центром масс этой системы точек называется такая точка O , что

$$m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

В докладе доказаны теорема о существовании и единственности центра масс и теорема о группировке точек, далее, с их использованием получены простые и понятные доказательства известных теорем из школьной геометрии: теоремы о точках пересечения медиан, биссектрис и высот, теорема Чебы. Также в докладе решается красивая, но малоизвестная задача Ньютона: доказать, что во всяком описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой; приводится аналог этой задачи в трёхмерном пространстве, предложенный на Московской математической олимпиаде школьников.

Кроме того, в докладе приведён пример изящного геометрического решения одной экстремальной задачи планиметрии, решением которой является точка Торричелли–Ферма.