

Так ли прост евклидов мир?

И. Х. Сабитов
isabitov@mail.ru

8 апреля 2017 г.

План доклада

- 1 Единственна ли аксиома параллельных?
- 2 Как ставится вопрос о геометрии реального мира?
- 3 Цилиндр как поверхность с локально евклидовой геометрией
- 4 Плоский тор
- 5 Бесконечный лист Мёбиуса
- 6 Бутылка Клейна
- 7 Заключение

1.1. Пятый постулат Евклида

Как известно, первой книгой, в которой было дано систематическое построение геометрии как совокупности утверждений, называемых **теоремами**, доказываемых логическими рассуждениями с использованием некоторой другой совокупности утверждений, называемых **аксиомами** и принимаемых за истину без доказательства, была книга "Начала" Евклида, древнегреческого ученого, жившего в III веке до нашей эры.

Среди аксиом, предложенных Евклидом, наибольшую известность имеет так называемая **аксиома параллельных**, которая утверждает, что **через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной**. Правда, Евклид формулировал ее в другой, но эквивалентной форме: "Если прямая пересекает две прямые и образует с ними внутренние односторонние углы в сумме неравные двум прямым, то при неограниченном продолжении этих двух прямых линий они пересекутся с той стороны, где сумма меньше двух прямых". В такой формулировке это утверждение известно под названием **пятый постулат** Евклида. Одним из важнейших следствий этого постулата является теорема о том, что сумма углов любого треугольника равна 180° . Важно заметить, что верно и обратное утверждение: **если сумма углов треугольника равна 180° , тогда выполняется и пятый постулат**.

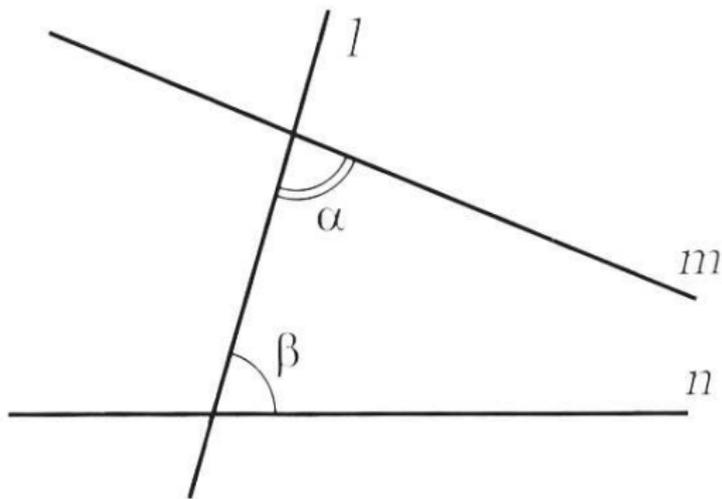


Рис. : 1

Среди всех аксиом Евклида пятый постулат вызывал наибольшие сомнения в силу как сложности формулировки, так и неочевидности его содержания, и в течении двух тысячелетий геометры хотели доказать его как теорему, вытекающую из остальных аксиом Евклида.

1.2. Другие аксиомы параллельных

Но наш соотечественник Николай Иванович Лобачевский (1792-1856), профессор Казанского университета, построил геометрию, в которой вместо евклидовой аксиомы о единственности параллельной прямой предполагается выполнение другой аксиомы, а именно, **через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести по крайней мере две прямые, параллельные данной**. Эта геометрия настолько отличалась от привычной геометрии Евклида, что сам Лобачевский назвал ее "воображаемой" геометрией. Например, в ней сумма углов треугольника с прямыми сторонами меньше 180° , есть треугольники с разными суммами углов, нет треугольников сколь угодно большой площади и т.д. Но она была **логически возможна!** Более того, итальянский геометр Бельтрами нашел в 1868 г. поверхность, на которой сумма углов треугольника тоже меньше 180° .

А в 1854 г. немецкий математик Риман построил геометрию, в которой аксиома параллельных формулировалась в третьем возможном варианте: **через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной**. Эта геометрия тоже была логически непротиворечивой, более того, она фактически была известна с древнейших времен под названием **сферическая геометрия**, или геометрия на сфере, только удивительным образом не обращали внимание, что эта геометрия отличается от геометрии Евклида на плоскости. Например, в ней сумма углов треугольника всегда больше 180° и существуют треугольники с разными суммами углов, прямые не имеют бесконечную длину и т.д. Для наглядного представления этой геометрии надо знать, что прямыми в ней являются так называемые большие окружности, получаемые сечением сферы плоскостями, проходящими через ее центр. Например, на **глобусе прямыми являются экватор и меридианы**.

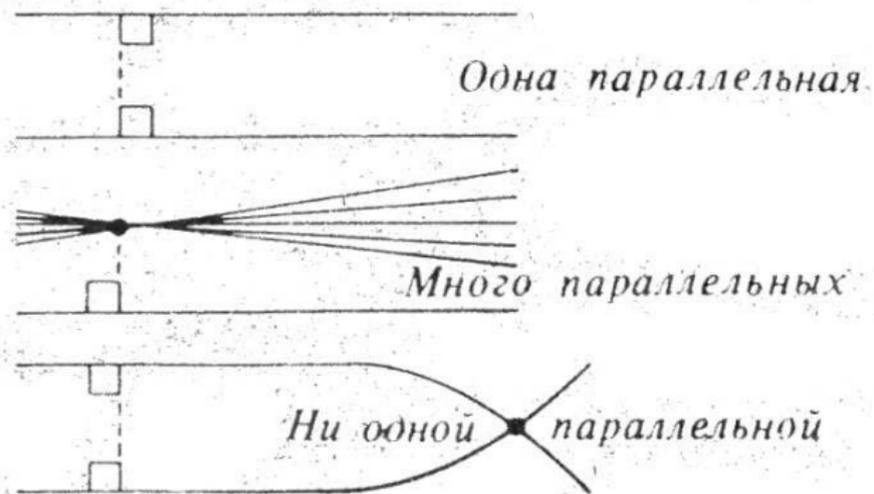


Рис. : 2

На рис.2 дано схематическое изображение содержания всех трех аксиом параллельных.

2.1. Измерения Гаусса и Лобачевского

Хорошо, все это пока теория, а какова геометрия нашего реального мира, какая аксиома параллельных в ней выполняется? И Лобачевский, и Гаусс (старший современник Лобачевского, тоже пришедший к мысли о возможности другой геометрии) понимали, что поскольку первое отличие геометрий заключается в разной величине суммы углов треугольника, то для установления геометрии мира для начала надо бы проверить, чему равна сумма углов треугольника не на чертежах, а в реальных треугольниках, вершинами которых являлись бы какие-нибудь объекты внешнего мира. Поэтому они оба, независимо друг от друга, провели с помощью геодезических и астрономических приборов измерения углов в "природных" треугольниках.

Гаусс измерял углы в треугольнике, вершинами которого были вершины трех гор в Германии, а Лобачевский измерял углы в треугольнике с вершинами Земля, Солнце и звезда Сириус. Однако найденные расхождения с 180° не превышали погрешности измерений. Вообще говоря, в силу ограниченности возможностей даже самых современных приборов наблюдения, установить истинную геометрию мира только путем измерения углов невозможно, что проиллюстрировано на рис. 3.



Рис. : 3

Предположим теперь, что кому-нибудь удалось с абсолютной точностью измерить сумму углов некоторого треугольника и убедиться, что она в точности равна 180° . Будет ли это означать, что геометрия нашего мира евклидова? Французский математик Лежандр доказал, что если хотя бы у одного треугольника сумма углов равна 180° , тогда и у всех треугольников будет то же свойство. Но Лежандр доказал это утверждение, используя все другие аксиомы Евклида, например, аксиому о том, что две прямые пересекаются только в одной точке. Но откуда мы знаем, что если две нарисованные на бумаге прямые пересекаются, то почему они при дальнейшем их продолжении больше нигде не пересекутся? Значит, для установления геометрии реального мира мы должны ставить под сомнение справедливость всех аксиом Евклида, а не только пятого постулата.

2.2. Локальная евклидовость пространства

Поскольку мы не в состоянии наблюдать всю Вселенную, зададимся следующим вопросом: пусть нам известно, что с какой бы точки мы Вселенную мы ни наблюдали, в **доступной области** наблюдения геометрия оказывается евклидовой. Следует ли отсюда, что **весь мир** является трехмерным евклидовым пространством? Свойство евклидовости геометрии в некоторой окрестности каждой точки называется **локальной евклидовостью** пространства. Это, в частности, означает, что у всех треугольников в данной окрестности суммы углов равны 180° (что, как мы знаем, является локальным эквивалентом пятого постулата), кратчайшее расстояние между точками дается длиной отрезка с концами в этих точках и т.д. Примером локальной евклидовости в двумерном случае является сама евклидова плоскость.

3.1. Развертка кругового цилиндра

Изучаемый в школе **прямой круговой цилиндр** образован параллельными прямыми, проходящими через точки некоторой окружности перпендикулярно ее плоскости (рис. 4).

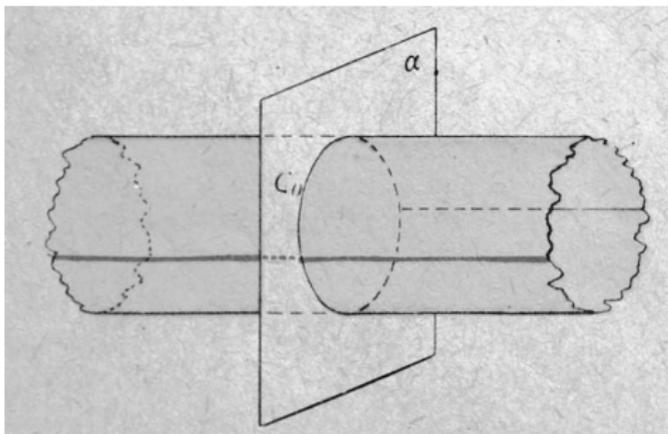


Рис. : 4

Эти прямые называются **образующими** цилиндра, а окружность называется его **направляющей** линией.

Нам, однако, будет интересна не сама поверхность, а ее **развертка** - та область на плоскости, из которой получается цилиндр. А получается он **отождествлением** параллельных краев полосы плоскости, заключенной между двумя параллельными прямыми. Абстрактная операция отождествления реализуется практически склеиванием краев полосы. Направим ось Ox параллельно образующим, направляющей окружности будет соответствовать прямолинейный отрезок длины $2\pi R$ на оси Oy , где R - радиус окружности (рис. 5) (считаем радиус окружности равным 1). Отождествляемые точки имеют координаты $(x, 0)$ и $(x, 2\pi)$. Обозначим полосу как Π .

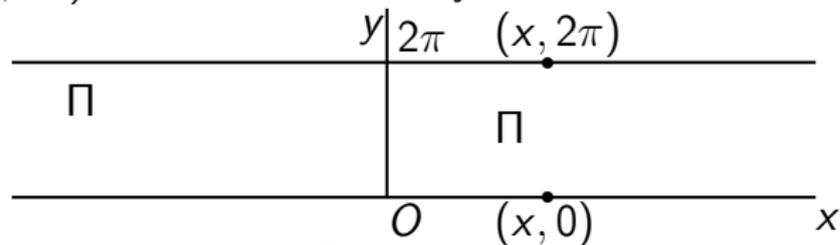


Рис.5

3.2. Локальная евклидовость полосы Π

Убедимся, что при условии отождествления краев полосы Π получится двумерное локально евклидовое пространство. Посмотрим рисунок 6.

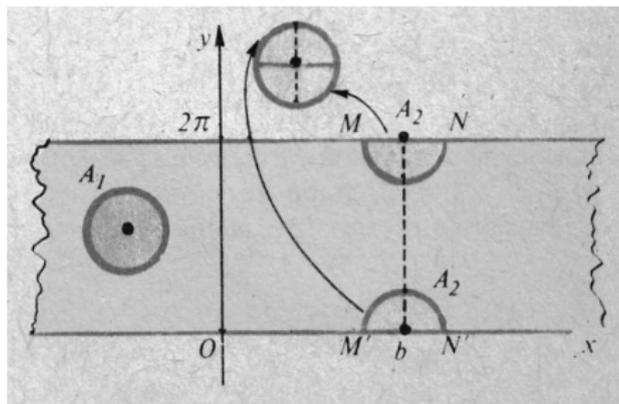


Рис. : 6

Если точка находится внутри полосы (например, точка A_1 , то ее достаточно малая окрестность просто является плоским кругом и там, конечно, геометрия евклидова.

Если же точка находится на краю полосы (например, точка $A_2(b, 0)$), тогда у нее есть другое представление в виде точки с координатами $(b, 2\pi)$, и поэтому ее окрестность состоит из двух полукругов.

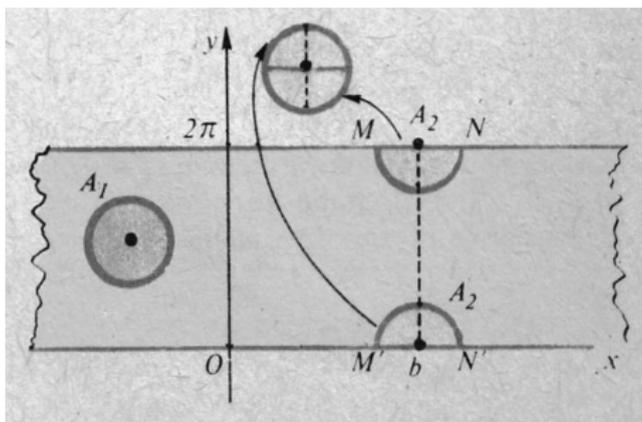


Рис. : 6

Объединение этих двух полукругов даст обычный круг, значит, полная окрестность точки A_2 снова оказывается обычным евклидовым кругом!

3.3. Геометрия на цилиндре

Исследуем теперь, как устроена геометрия на цилиндре - какие на ней прямые, как вычисляются расстояния и т.д. Сначала рассмотрим один пример. Пусть есть местность, расположенная между двумя параллельными дорогами, вдоль которых часто расположены, скажем, станции с телефоном, и из каждой станции сообщение о новости можно передать мгновенно на симметрично расположенную станцию на другой дороге. Предположим, что в самой местности телефонов нет, и новости передаются гонцами. Пусть за расстояние между пунктами принимается кратчайшее время, необходимое для передачи новости. Если пункты расположены близко друг к другу, тогда для передачи новости гонец должен бежать по соединяющему эти точки отрезку. Но если два пункта A и B расположены близко к разным дорогам, тогда новость можно передать быстрее так: гонец бежит, скажем, от A к станции на ближайшей дороге, оттуда новость сразу передается по телефону на симметрично расположенную станцию на другой дороге, и из этой станции другой гонец бежит к пункту B .

Ситуация с измерением расстояния в полосе со склеенными краями схожа с этим примером, см. рис. 7. Расстояние между точками определяется как длина кратчайшей линии, соединяющей эти точки. Тогда для точек A и B , для которых $|y_A - y_B| < \pi$, расстояние равно длине отрезка между ними; но для точек A и C с $|y_A - y_C| > \pi$ более коротким будет путь $AK' + KC$ (точки K и K' играют роль станций из примера).

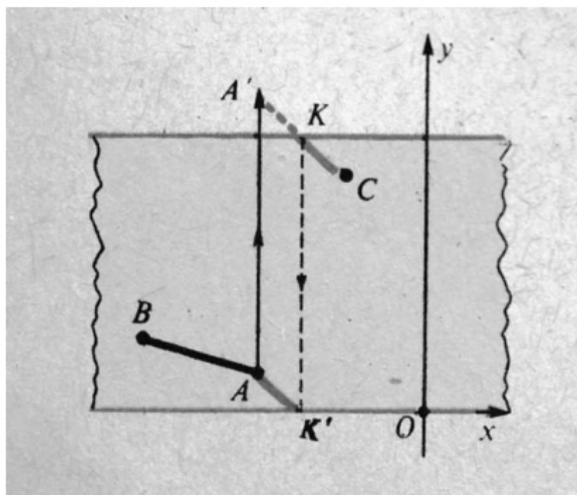


Рис. : 7

На основании рис. 7 легко предложить формулу для расстояния между точками в зависимости от координат точек. Она имеет вид

$$|AB| = \begin{cases} \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}, & \text{если } |y_A - y_B| \leq \pi \\ \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (2\pi - |y_A - y_B|)^2}, & \text{если } |y_A - y_B| \geq \pi \end{cases}$$

Прямые в полосе Π можно определять как линии, достаточно малые дуги которых дают кратчайшее расстояние между их концами, что обосновано локальной евклидовостью. Существуют три типа прямых: 1) обычные прямые, параллельные краям полосы; 2) любой отрезок, перпендикулярный краям (это будет замкнутая прямая длины 2π); 3) совокупность периодически повторяющихся параллельных наклонных, концы которых соответствуют отождествляемым точкам, см. на рис. 8.

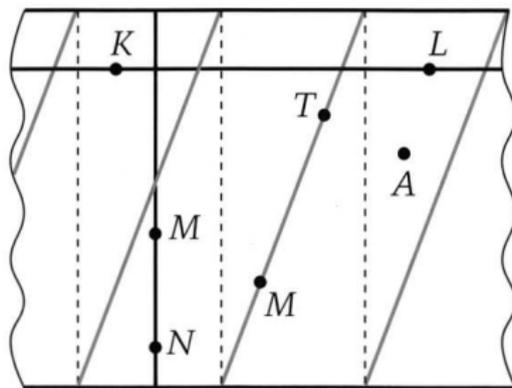


Рис. : 8

Вот как смотрятся эти прямые на поверхности цилиндра. В частности, прямые, состоящие из бесконечного числа параллельных отрезков, переходят в винтовую линию - как нарезка на болтах.

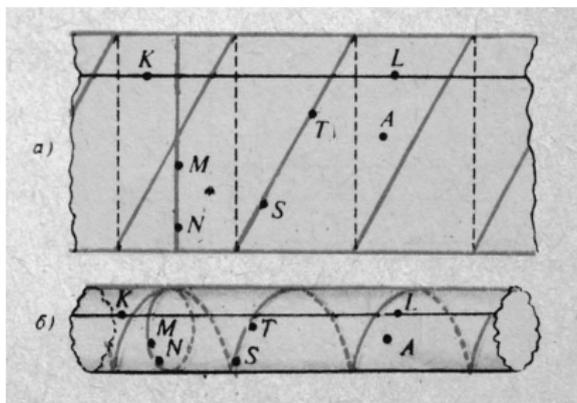


Рис. : 9

Евклидова аксиома параллельных сохраняется, но нарушаются многие другие аксиомы и теоремы, например, две прямые могут пересекаться в бесчисленном множестве точек, вид окружности зависит от значения радиуса и т.д.

4.1. Определение плоского тора

Пусть на плоскости Oxy дан прямоугольник с вершинами A, B, C, D . Отождествим сторону AB со стороной DC так, что A отождествляется с D , а B с C ; далее, отождествим сторону AD с BC , так чтобы вершина B совпала с A , а C с D , так что все 4 вершины будут считаться за одну точку. Локальная евклидовость полученного объекта усматривается из рис. 10.

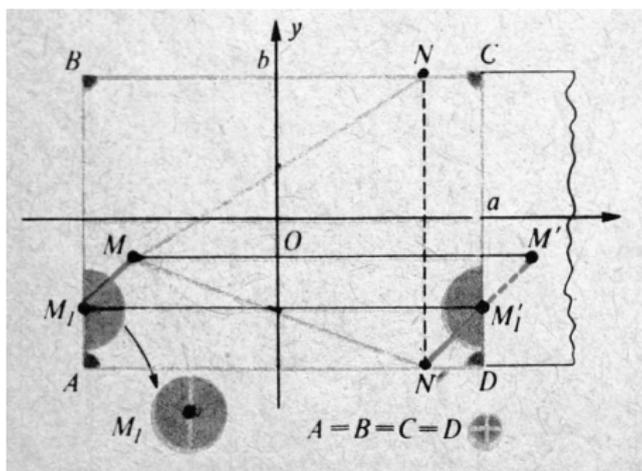
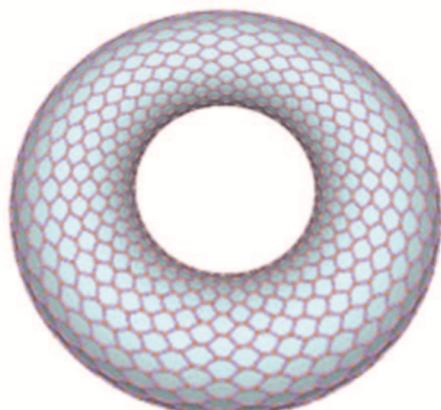


Рис. 10

4.2. Геометрия плоского тора

В отличие от цилиндра, мы не можем осуществить все эти отождествления как реальное склеивание указанных сторон без появления ребер и особых точек. Но общий вид поверхности, не являющейся локально евклидовой, но допускающей такой же способ построения виден из рисунка 11. Такая поверхность называется **тором**.



С учетом отождествлений получаем, что отрезок MN не может быть кратчайшим путем, так как он длиннее чем отрезок MN' . Далее, рассуждая как в случае цилиндра, получаем, что самый короткий путь от M к N - это путь $MM_1 + M_1N' = M'N'$, длина которого равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3b}{4}\right)^2}$, что и будет искомым расстоянием между M и N .

Прямые на плоском торе локально представляются отрезками обычных прямых и отличаются поведением при их продолжении. Они бывают или замкнутые или бесконечной длины, см. рис. 12.

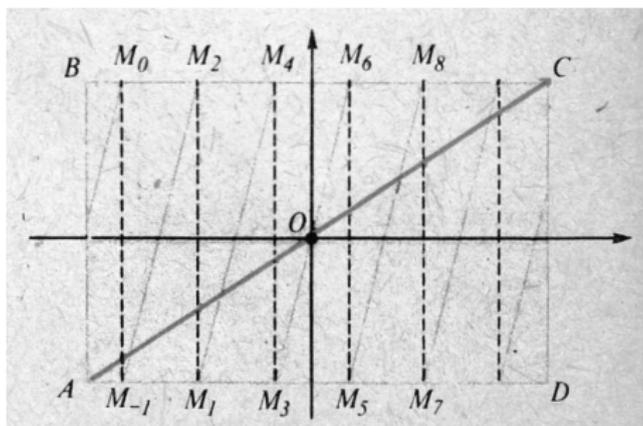


Рис. : 12

Общее утверждение такое: прямая на плоском торе бывает замкнутая в том и только в том случае, когда число $\frac{atg\alpha}{b}$ является рациональным, где $tg\alpha$ - угловой коэффициент относительно оси Ox .

5.1. Определение листа Мёбиуса

Снова рассмотрим бесконечную полосу

$\Pi : a \leq y \leq b, -\infty < x < +\infty$, но на этот раз проведем отождествление краев полосы по следующему правилу: точка (x, a) отождествляется с точкой $(-x, b)$.

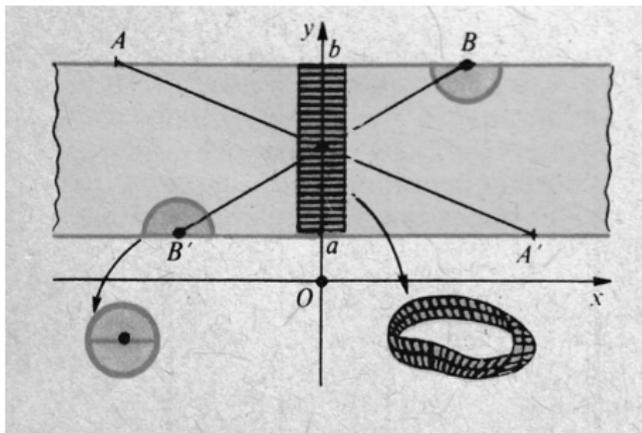


Рис. : 13

Локальная евклидовость усматривается из рис. 13, только при склеивании двух полукругов их диаметры надо располагать с учетом нового правила отождествления. Это новое правило приводит к другому виду прямых: их бывает три типа - один отрезок, перпендикулярный к краям полосы, обычные прямые, параллельные краям полосы, и совокупность двух семейств параллельных отрезков. Расстоянием между двумя точками, как обычно, называют длину кратчайшей линии, соединяющей эти точки.

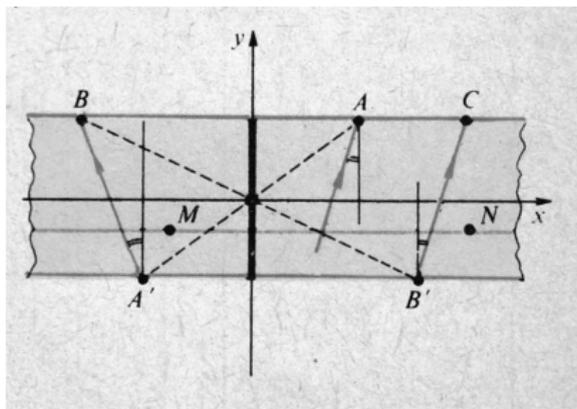


Рис. : 14

Бесконечный лист Мёбиуса невозможно реализовать в пространстве в виде поверхности с сохранением расстояний - при попытке склеить отождествляемые точки обязательно появляются особенности. Но части полосы Мёбиуса склеить можно - получается поверхность, называемая **лентой Мёбиуса**. Самое замечательное ее свойство заключается в том, что эта поверхность - **односторонняя**. Это значит, что если мы начнем красить ее, закрашивая все, что можно покрасить, **не пересекая край**, то в конце концов окажется, что на ленте не осталось не закрашенных мест. Чтобы это оценить, попробуйте закрасить часть цилиндра, тоже не пересекая край - увидите, что в конце одна сторона цилиндра закрашена, другая - нет. Это значит, что цилиндр - **двусторонняя** поверхность.

6.1. Определение бутылки Клейна

Как цилиндр и лист Мёбиуса имели общее происхождение - из бесконечной полосы на плоскости, но с разными правилами отождествления ее краев, так тор и бутылка Клейна тоже имеют общий исходный "натуральный материал" прямоугольник. Но тоже с разными правилами отождествления противоположных его сторон.

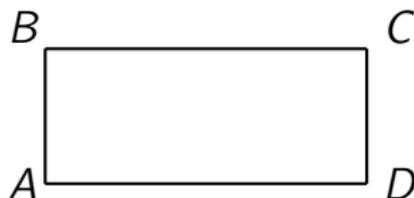


Рис.15

Отождествляем точки сторон AB и DC с условием $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow C$ и точки сторон BC и AD с условием $B \leftrightarrow D, C \leftrightarrow A$. Локальная евклидовость окрестностей проверяется так же, как и для тора.

Бутылка Клейна, заданная в виде модели, реализуется в пространстве только в виде поверхности с самопересечением, рис. 16 и рис. 17. Эта поверхность также является односторонней.

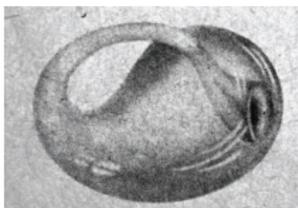


Рис. : 16

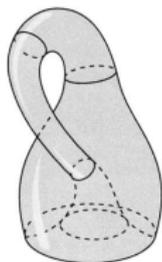


Рис. : 17

7. Заключение

Заметим, что во всех примерах прямые обладали замечательным свойством - все они продолжались неограниченно хотя бы по самим себе, повторяя свой путь. Такие пространства называются **полными**. Так вот в науке, называемой высшей геометрией, доказывается, что все двумерные полные локально евклидовы пространства исчерпываются рассмотренными 5 случаями - 1) плоскость, 2) цилиндр, 3) плоский тор, 4) бесконечный лист Мёбиуса и 5) бутылка Клейна. Таким образом, мы видим, что если даже локально во всех точках пространство является евклидовым, из этого еще не следует, что оно в целом является евклидовым в смысле выполнения **всех** аксиом Евклида. В трехмерном случае ситуация еще более разнообразна - существует **18** видов трехмерных полных локально евклидовых пространств.